



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 9 -a

SUBIECTE

Problema 1

Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm intervalul $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{16n-4}{n+1} \right]$.

- a) Determinați valorile lui n pentru care mulțimea $I_n \cap \mathbb{N}$ are exact 13 elemente.
- b) Determinați numărul minim și numărul maxim de elemente pe care le au mulțimile $I_n \cap \mathbb{N}$, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$.

Problema 2

Rezolvați ecuația $[x[x]] = 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Problema 3

- a) Fie S, T, U, V patru puncte în plan, X mijlocul segmentului ST și Y mijlocul segmentului UV . Arătați că $2\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{TV}$.
- b) Fie $ABCDE$ un pentagon convex și F, G, H, I, J, K mijloacele segmentelor BC , CD , DE , EA , GI , respectiv FH . Presupunem că $J \neq K$. Arătați că $JK \parallel AB$.

Problema 4

Arătați că, dacă x este număr real nenul și $\{x\} + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1$, atunci $\{x^2\} + \left\{ \frac{1}{x^2} \right\} = 1$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 9-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor *Darius Popescu*, SGM nr. 10/2023)

Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm intervalul $I_n = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{16n-4}{n+1} \right]$.

a) Determinați valorile lui n pentru care mulțimea $I_n \cap \mathbb{N}$ are exact 13 elemente.

b) Determinați numărul minim și numărul maxim de elemente pe care le au mulțimile $I_n \cap \mathbb{N}$, pentru $n = 1, 2, 3, \dots$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $I_1 = [2, 6]$, deci $I_1 \cap \mathbb{N}$ are 5 elemente	1p
Pentru $n \geq 2$, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \in (1, 2)$	1p
$I_n \cap \mathbb{N}$ are 13 elemente dacă și numai dacă $\frac{16n-4}{n+1} \in [14, 15)$, adică $9 \leq n \leq 18$	2p
b) Pentru $n \geq 2$, $\frac{16n-4}{n+1} = 16 - \frac{20}{n+1} \geq 16 - \frac{20}{3} > 9$, deci $I_n \cap \mathbb{N}$ are cel puțin 9 elemente, iar minimul cerut este 5 (pentru I_1)	1p
$16 - \frac{20}{n+1} < 16$, deci $I_n \cap \mathbb{N}$ are cel mult 14 elemente, iar maximul cerut este 14 și se obține, de exemplu, pentru $n = 20$	2p

Problema 2 (autor ***)

Rezolvați ecuația $[x[x]] = 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $x \geq 2$, atunci $x[x] \geq 2x \geq 4$, deci ecuația nu are soluții în acest caz	1p
Dacă $x \in [1, 2)$, atunci $[x[x]] = [x] = 1$, deci orice $x \in [1, 2)$ este soluție a ecuației	2p
Dacă $x \in [0, 1)$, atunci $x[x] = 0$, deci ecuația nu are soluții în acest caz	1p
Dacă $x \in [-1, 0)$, atunci $x[x] = -x$, iar $[-x] = 1 \Leftrightarrow -x \in [1, 2) \Leftrightarrow x \in (-2, -1]$ deci ecuația are în acest caz soluția $x = -1$	1p
Dacă $x < -1$, atunci $[x] \leq -2$, deci $x[x] \geq -2x > 2$ și ecuația nu are soluții în acest caz	1p

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{-1\} \cup [1, 2)$	1p
--	-----------

Problema 3 (autor *Mihai Alexandru*)

a) Fie S, T, U, V patru puncte în plan, X mijlocul segmentului ST și Y mijlocul segmentului UV . Arătați că $2\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{TV}$.

b) Fie $ABCDE$ un pentagon convex și F, G, H, I, J, K mijloacele segmentelor BC, CD, DE, EA, GI , respectiv FH . Presupunem că $J \neq K$. Arătați că $JK \parallel AB$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UY}$	1p
$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TV} + \overrightarrow{VY}$	1p
Cum $\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{XT} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{VY} + \overrightarrow{UY} = \vec{0}$, adunând primele două relații obținem concluzia	2p
b) $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{IF}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC})\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, de unde $JK \parallel AB$	3p

Problema 4 (autor ***)

Arătați că, dacă x este număr real nenul și $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, atunci $\{x^2\} + \left\{\frac{1}{x^2}\right\} = 1$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă a, b sunt numere reale, observăm că $\{a\} + \{b\} = 1$ dacă și numai dacă $a + b$ este întreg și a, b nu sunt întregi: - dacă $\{a\} + \{b\} = 1$, atunci $a + b = [a] + [b] + \{a\} + \{b\} = [a] + [b] + 1 \in \mathbb{Z}$ și a, b nu sunt întregi, deoarece în acest caz am avea $\{a\} + \{b\} = 0$; - dacă $a + b$ este întreg și a, b nu sunt întregi, atunci $\{a\} + \{b\} = a + b - [a] - [b] \in \mathbb{Z}$, $\{a\} + \{b\} > 0$ și $\{a\} + \{b\} < 2$, deci $\{a\} + \{b\} = 1$	3p
Dacă $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, atunci $x + \frac{1}{x} = n$, cu n întreg, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$ este întreg	3p
Dacă x^2 și $\frac{1}{x^2}$ sunt întregi, atunci $x^2 = 1$, deci $x = \pm 1$, contradicție cu $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 10.02 2024

CLASA a X-a

Subiectul 1. Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu $h(x) = f(x) + \sqrt{2024}g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că, dacă cel puțin una dintre funcțiile f și g este injectivă, atunci h este injectivă.

b) Dacă h este injectivă, este necesar ca cel puțin una dintre funcțiile f și g să fie injectivă?

Subiectul 2. Fie funcția $f: (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\log_{2023} 2024} + 2023^{\log_x 2024}$.

Să se arate că $\{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 2\} = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 4048\}$.

Subiectul 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate ca numărul $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Gazeta Matematică

Subiectul 4. Se consideră numerele complexe a, b, c, d astfel încât $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$,

$|a + b + c + d| = \sqrt{2}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Să se arate că $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ 10.02.2024

CLASA a X-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu $h(x) = f(x) + \sqrt{2024}g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că, dacă cel puțin una dintre funcțiile f și g este injectivă, atunci h este injectivă.

b) Dacă h este injectivă, este necesar ca cel puțin una dintre funcțiile f și g să fie injectivă?

Barem de notare

a) $f(x) + \sqrt{2024}g(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}$

Cum $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2024} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$ 3p

g nu este injectivă, rezultă că f este injectivă.....1p

$h(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$, deci h este injectivă.....1p

b) Da. $h(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$ Dacă h este injectivă, rezultă că f este injectivă.....2p

Subiectul 2. Fie funcția $f: (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\log_{2023} 2024} + 2023^{\log_x 2024}$.

Să se arate că $\{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 2\} = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 4048\}$.

Alina Paraschiv

Barem de notare

• $f(x) = 2024^{\log_{2023} x} + 2024^{\log_x 2023}$ 1p

Fie $A = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 2\}$ și $B = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 4048\}$

• Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $\log_{2023} x < 0$ și $\log_x 2023 < 0$, deci $f(x) < 2$, de unde $x \notin A \cup B$. Rezultă $A \cup B \subseteq (1, \infty)$ **2p**

• Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $\log_{2023} x > 0$, $\log_x 2023 > 0$ și, aplicând de două ori inegalitatea mediilor, obținem $f(x) \geq 2\sqrt{2024^{\log_{2023} x + \log_x 2023}} \geq 2\sqrt{2024^2} = 4048$,

deci $x \in A \cap B$, de unde $(1, \infty) \subseteq A \cap B$ **3p**

• Obținem $A \cup B \subseteq A \cap B$, deci $A = B$ **1p**

Subiectul 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că numărul $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Cristinel Mortici, Gazeta Matematică

Barem de notare

• Șirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, cu $x_k = k(k-1)$ este strict crescător **1p**

• $x_n = n(n-1) < n^2 + \frac{n}{2} = n^2 + 2^{\log_2 n-1} < n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil} \leq n^2 + 2^{\log_2 n} = n(n+1) = x_{n+1}$
..... **4p**

• $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ este termen al șirului $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \Leftrightarrow n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil} = n(n+1) \Leftrightarrow \lceil \log_2 n \rceil = \log_2 n \Leftrightarrow \log_2 n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 2^p$ cu $p \in \mathbb{N}$ **2p**

Subiectul 4. Se consideră numerele complexe a, b, c, d astfel încât $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, $|a + b + c + d| = \sqrt{2}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Să se arate că $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.

Flavian Georgescu

Barem de notare

• Cum $\sum a^2 = 0$ și $|a^2| = |b^2| = |c^2| = |d^2| = 1$, rezultă că a^2, b^2, c^2, d^2 sunt afixe ale vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate. După eventuale redenumiri ale afixelor, putem presupune că $a^2 = -b^2, c^2 = -d^2$ și, mai mult, $b = ia, d = ic$ **3p**

- Cum $|a + b + c + d| = \sqrt{2}$, rezultă $|(1+i)(a+c)| = \sqrt{2}$, deci $|a+c| = 1$. Atunci
 $1 = (a+c)\overline{(a+c)} = 2 + a\bar{c} + \bar{a}c$, deci $a\bar{c} + \bar{a}c = -1$, de unde $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = -1$, echivalent
cu $a^2 + c^2 = -ac$ **2p**
- Avem $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (1-i)(a^3 + c^3) = (1-i)(a+c)(a^2 - ac + c^2) =$
 $= -2ac(1-i)(a+c)$, de unde $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2|ac||1-i||a+c| = 2\sqrt{2}$ **2p**

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
BUCUREȘTI, ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024****CLASA a 11 -a****SUBIECTE****Problema 1**

Fie A o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale și cu proprietatea $A^3 = I_2$. Arătați că $\det A = 1$ și determinați valorile posibile ale sumei elementelor de pe diagonala principală a matricei.

Problema 2

a) Arătați că, dacă X, Y sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, atunci $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$.

b) Arătați că, dacă A și B sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar $\det(AB + BA) \leq 0$, atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Problema 3

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție crescătoare, cu proprietatea $f(f(x)) = \sqrt{x^2 + x}$.

a) Arătați că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Problema 4

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir descrescător de numere reale nenule, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ și $(b_n)_{n \geq 2}$ șirul

definit prin $b_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - n$.

a) Arătați că, dacă $l > 0$, atunci șirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este convergent.

b) Folosind eventual inegalitatea $t - 1 \geq \ln t$, oricare ar fi numărul real $t \geq 1$, arătați că, dacă $l = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 11-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

Fie A o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale și cu proprietatea $A^3 = I_2$. Arătați că $\det A = 1$ și determinați valorile posibile ale sumei elementelor de pe diagonala principală a matricei.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum $(\det A)^3 = \det(A^3) = \det I_3 = 1$ și $\det A$ este număr real, obținem $\det A = 1$	2p
Este cunoscut că $A^2 = sA - dI_2$, unde d este determinantul și s este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei	1p
Atunci $A^3 = sA^2 - A = (s^2 - 1)A - sI_2$, deci ipoteza devine $(s^2 - 1)A = (s + 1)I_2$	1p
Dacă $s \neq -1$, atunci $(s - 1)A = I_2$, de unde $(s - 1)^3 = 1$, deci $s = 2$. Valoarea $s = 2$ se obține, de exemplu, pentru $A = I_2$	2p
Valoarea $s = -1$ se obține dacă, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1p

Problema 2 (autor ***)

a) Arătați că, dacă X, Y sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, atunci $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$.

b) Arătați că, dacă A și B sunt matrice pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar $\det(AB + BA) \leq 0$, atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ avem $\det(X + Y) + \det(X - Y) =$ $= 2(x_1x_4 + y_1y_4 - x_2x_3 - y_2y_3) = 2\det X + 2\det Y$	2p
Avem $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ și $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$	2p
Luând $X = A^2 + B^2$, $Y = AB + BA$, adunând relațiile precedente și folosind a) reiese $2\det(A^2 + B^2) + 2\det(AB + BA) = \det((A + B)^2) + \det((A - B)^2)$	2p
Cum $\det((A + B)^2) \geq 0$, $\det((A - B)^2) \geq 0$ și $\det(AB + BA) \leq 0$, rezultă concluzia	1p

Problema 3 (autor ***)

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție crescătoare, cu proprietatea $f(f(x)) = \sqrt{x^2 + x}$.

a) Arătați că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $f(x) \leq x$, atunci $f(f(x)) \leq f(x) \leq x$, de unde $\sqrt{x^2 + x} \leq x$ – fals	2p
b) Arătăm că $f(x) < x + 1$	1p
Dacă $f(x) \geq x + 1$, atunci $f(f(x)) \geq f(x + 1) \geq f(x) \geq x + 1$, deci $\sqrt{x^2 + x} \geq x + 1$ – fals	2p
Deoarece $\frac{x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}$, pentru orice $x > 0$, și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$, limita cerută este 1	2p

Problema 4 (autor Adrian Boțan, GM-B nr. 6-7-8/2023)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir descrescător de numere reale nenule, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ și $(b_n)_{n \geq 2}$ șirul

definit prin $b_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - n$.

a) Arătați că, dacă $l > 0$, atunci șirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este convergent.

b) Folosind eventual inegalitatea $t - 1 \geq \ln t$, oricare ar fi numărul real $t \geq 1$, arătați că, dacă $l = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Din ipoteză reiese că $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq l > 0$	1p
Rezultă $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} - 1 = \frac{(a_n - a_{n+1})(a_1 - a_n)}{a_1 a_n} \geq 0$, deci $(b_n)_{n \geq 2}$ este crescător	2p
$b_n = \frac{a_1 - a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - 1 \leq \frac{(a_1 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)}{l} + \frac{a_n - a_1}{a_1} \leq \frac{a_1 - l}{l}$, deci $(b_n)_{n \geq 2}$ este mărginit superior, de unde reiese că $(b_n)_{n \geq 2}$ este convergent	2p
b) $b_n = \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1 \right) + \frac{a_n}{a_1} - 1 \geq \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) + 0 - 1 = \ln \frac{a_1}{a_n} - 1$ și $\frac{a_1}{a_n} \rightarrow \infty$ implică cerința	2p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 10.02 2024

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Să se determine primitivele funcției $f : (-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2}$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Spunem că un morfism de grupuri $f : G \rightarrow G$ are proprietatea (P) , dacă există un număr $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x^k) = x$, pentru orice $x \in G$.

a) Să se arate că, dacă f are proprietatea (P) , atunci f este izomorfism.

b) Știind că $(G, \cdot)$ este comutativ, finit, cu n elemente, să se arate că f are proprietatea (P) dacă și numai dacă există $q \in \mathbb{Z}$ cu $(n, q) = 1$ astfel încât $f(x) = x^q$, pentru orice $x \in G$.

Subiectul 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|F(x)| + f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -e^x$ verifică ipoteza problemei.

b) Să se determine toate funcțiile f care verifică ipoteza problemei.

Subiectul 4. Fie n, k două numere naturale cu $1 \leq k \leq n$, $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și X_0 o submulțime a lui G , cu k elemente. Pentru fiecare $a \in G$ notăm cu $aX_0 = \{ax \mid x \in X_0\}$ și fie $M = \{Y \subseteq G \mid \exists a \in G, Y = aX_0\}$. Știind că M are cel mult $\frac{n}{k}$ elemente, să se arate că G are un subgrup cu k elemente.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ 10.02.2024

CLASA a XII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Să se determine primitivele funcției $f: (-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2}$

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică

Barem de notare

$$\begin{aligned} & \bullet \int \frac{x^3 e^x}{(x+3)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x+3} \right)' x^3 e^x dx = -\frac{1}{x+3} x^3 e^x + \int \frac{1}{x+3} (3x^2 + x^3) e^x dx = \dots\dots\dots 3p \\ & \bullet = -\frac{1}{x+3} x^3 e^x + \int x^2 e^x dx = -\frac{1}{x+3} x^3 e^x + x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \dots\dots\dots 2p \\ & \bullet -\frac{1}{x+3} x^3 e^x + x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = \frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} e^x + C \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Subiectul 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Spunem că un morfism de grupuri $f: G \rightarrow G$ are proprietatea (P) , dacă există un număr $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x^k) = x$, pentru orice $x \in G$.

a) Să se arate că, dacă f are proprietatea (P) , atunci f este izomorfism.

b) Știind că $(G, \cdot)$ este comutativ, finit, cu n elemente, să se arate că f are proprietatea (P) dacă și numai dacă există $q \in \mathbb{Z}$ cu $(n, q) = 1$ astfel încât $f(x) = x^q$, pentru orice $x \in G$.

Marian Andronache

Barem de notare

a) • Fie $x \in G$. Cum $f(x^k) = x \Rightarrow f$ este surjectivă.....1p

• Fie $x, y \in G$. Atunci

$f(x) = f(y) \Rightarrow (f(x))^k = (f(y))^k \Rightarrow f(x^k) = f(y^k) \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă.....1p

b) • Fie f cu proprietatea (P), $k \in \mathbb{Z}$ cu $(f(x))^k = x$ și p un număr prim cu $p \nmid n$ și $p \nmid k$. Din teorema lui Cauchy, există $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^p = e$, unde e este elementul neutru al lui G . Rezultă $e = f(e) = f(a^k) = a$, contradicție, deci $(n, k) = 1$. Fie $t, q \in \mathbb{Z}$ cu

$tn + qk = 1$, atunci $(n, q) = 1$ și $f(x) = f(x^{tn+qk}) = f(x^{qk}) = f((x^q)^k) = x^q$, pentru orice $x \in G$ 3p

• Reciproc, dacă $f(x) = x^q$ cu $(n, q) = 1$, cum G este abelian, rezultă că f este morfism. Fie $t, k \in \mathbb{Z}$ cu $tn + qk = 1$, atunci $f(x^k) = x^{kq} = x^{1-m} = x$ pentru orice $x \in G$, deci f are proprietatea (P)2p

Subiectul 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|F(x)| + f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -e^x$ verifică ipoteza problemei.

b) Să se determine toate funcțiile f care verifică ipoteza problemei.

Vlad Florentin Drinceanu și Flavian Georgescu

Barem de notare

a) • $F(x) = -e^x$ are proprietatea din enunț, deci f verifică ipoteza problemei.....2p

b) • Fie f cu proprietatea din enunț și F o primitivă cu $|F(x)| + f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, cu $F(x) \geq 0$ pentru $x \in I$. Cum $F(x) + f(x) = 0$, rezultă că $(e^x F(x))' = 0$, deci $e^x F(x) = k \geq 0$. Obținem $F(x) = ke^{-x}$, deci $f(x) = pe^{-x}$ oricare ar fi $x \in I$, cu $p \leq 0$ 1p

• Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu $F(x) \leq 0$ pentru $x \in I$. Cum $-F(x) + f(x) = 0$, rezultă că $(e^{-x}F(x))' = 0$, deci $e^{-x}F(x) = k \leq 0$. Obținem $F(x) = ke^x$, deci $f(x) = ke^x$ oricare ar fi $x \in I$, cu $k \leq 0$ 1p

• Dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu $F(a) = 0$, cum $f(x) = -|F(x)| \leq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este descrescătoare, deci $F(x) \geq 0$ pe $(-\infty, a)$ și $F(x) \leq 0$ pe (a, ∞) . Atunci $F(x) = pe^{-x}$, $x \in (-\infty, a)$ și $F(x) = ke^x$, $x \in (a, \infty)$, iar, din continuitatea lui F în a , obținem $p = k = 0$, deci $F(x) = 0$, de unde $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ 2p

• Obținem funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = ke^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = ke^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu $k \leq 0$, funcții care verifică ipoteza problemei.....1p

Subiectul 4. Fie n, k două numere naturale cu $1 \leq k \leq n$, $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și X_0 o submulțime a lui G , cu k elemente. Pentru fiecare $a \in G$ notăm cu $aX_0 = \{ax | x \in X_0\}$ și fie $M = \{Y \subseteq G | \exists a \in G, Y = aX_0\}$. Știind că M are cel mult $\frac{n}{k}$ elemente, să se arate că G are un subgrup cu k elemente.

Marian Andronache

Barem de notare

• Fie $a \in G$ și $x \in X_0$. Cum $a \in ax^{-1}X_0 \in M$, rezultă că $G = \bigcup_{Y \in M} Y$ 2p

• Fie $Y = aX_0 \in M$. Cum funcția $f: X_0 \rightarrow Y, f(x) = ax$ este bijectivă, rezultă că $|Y| = k$, unde $|A|$ reprezintă cardinalul mulțimii A . Cum $n = |G| = \left| \bigcup_{Y \in M} Y \right| \leq \sum_{Y \in M} |Y| \leq \frac{n}{k} \cdot k = n$, rezultă că $|M| = \frac{n}{k}$ și elementele lui M reprezintă o partiție a lui G3p

• Fie $Y_0 = aX_0$, cu $e \in Y_0$, unde e este elementul neutru al lui G . Fie $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2$, cu $x_1, x_2 \in X_0$. Atunci $y_1^{-1}y_2 = x_1^{-1}a^{-1}ax_2 = x_1^{-1}x_2 \in x_1^{-1}X_0$. Cum $e \in x_1^{-1}X_0$, rezultă că $x_1^{-1}X_0 = Y_0$, deci $y_1^{-1}y_2 \in Y_0$, de unde Y_0 este subgrup al lui G cu k elemente.....2p